АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ПРЕПРИНТ

А.М.МОЛЧАНОВ

# АСИМПТОТИКА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Метод Хинчина в статистической механике

ПУЩИНО – 1987

Указан класс нелинейных функционалов, задаваемых многомерными интегралами, вычисление которых упрощается с увеличением размерности.

Даны приложения к вычислению статистических сумм специального вида.

## Введение.

В задаче вычисления статистических сумм мы так же далеки от существенных сдвигов, как и раньше. И это несмотря на бурное развитие вычислительной техники.

В значительно менее громоздкой задаче имитационного моделирования опыт работы резюмирован словосочетанием "прклятие размерности", хотя речь идет "всего лишь" о тысячах компонент. Что же говорить о физических задачах , где "нормально" число Авогадро

$$N = 6.10^{23} .$$

Вспомним, однако, Лапласа, который с законной гордостью писал, что его метод "тем более точен, чем более он необходим".

В предлагаемой работе разбирается обобщение подхода А.Я.Хинчина, позволяющее свести вычисление одного важного класса многомерных интегралов (в том числе статистических сумм специального вида) к методу Лапласа.

## n° 1. Независимые компоненты

Статистическая сумма - частный случай многомерного интеграла от скалярной функции,

$$I = \int_X F(X)\, dX = \int_{x_1} \dots \int_{x_N} F(x_1, \dots, x_N)\, dx_1 \dots dx_N \qquad (1)$$

Здесь и далее используются естественные обозначения:

$$X = (x_1, \dots, x_N) \qquad (2)$$

для многомерного пространства X, состоящего из большого числа N одинаковых компонент x, и обозначение,

$$dX = dx_1 \dots dx_N , \qquad (3)$$

для меры в этом пространстве.

Реалистический подход к таким задачам развит А.Я.Хинчиным. Основная идея - резкое с у ж е н и е класса изучаемых функций F(X).

Для усвоения идеи выясним условия, при которых интеграл сводится к произведению интегралов по компонентам

$$\int_X F(X)\,dX = \int_{X'} F'(X')\,dX' \int_{X''} F''(X'')dX'' \qquad (4)$$

Достаточные условия почти очевидны:

$$X = (X', X'') \qquad (5)$$

$$dX = dX' \; dX'' \qquad (6)$$

$$F(X) = F'(X') \; F''(X'') \qquad (7)$$

Первые два соотношения выражают идею прямого произведения пространств с мерой, а вот третье накладывает весьма жесткое ограничение на допустимые функции $F(x)$. В том виде, как оно получено, оно означает мультипликативность по аргументам. Удобнее, однако, перейти к логарифмам и тогда это условие означает аддитивность:

$$H(X) = H'(X') + H''(X'') \qquad (8)$$

Хинчин назвал подобные функции "сумматорными" и проводил последовательное изучение этого класса функций. Один из его основных результатов – установление своеобразной "эргодичности" сумматорных функций.

В статистической физике обычно рассматривают три главных типа ОСРЕДНЕНИЯ – по ВРЕМЕНИ (T), по ПРОСТРАНСТВУ (X) и по ЧАСТИЦАМ (N). Утверждение о равенстве средних по времени (T) и по фазовому пространству (X) именуется ЭРГОДИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗОЙ, а само свойство – эргодичностью. Естественно назвать такую эргодичность – TX-эргодичностью.

Логически возможны три типа эргодических равенств. А.Я.ХИНЧИН первым, повидимому, обратил внимание на значение XN-эргодичности.

Это замечательное свойство – обобщение и функциональный аналог Закона Больших Чисел. Оно асимптотически точно при большом ($N \gg 1$) числе компонент и допускает следующее качественное описание.

Выделим одну ("базовую") сумматорную функцию $H(X)$.

Любая другая сумматорная функция $A(X)$ почти <u>постоянна,</u>

$$A(X) \approx A(E),$$

на каждой поверхности уровня,
---------------------------

$$H(X) = E,$$

базовой функции H.
----------------

Одно из следствий этой замечательной теоремы и приводит А.Я.Хинчина к установлению XN-эргодичности, причем осреднение по пространству задается (определенным образом) функцией H(X).

▶ Замечание
▶ ========
▶ Имеется в виду близость A(X) и A(E) в среднем квадратичном или по мере. Для эргодических рассмотрений этого вполне достаточно. ▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲▲

Это построение дает возможность полного анализа системы, состоящей из н е з а в и с и м ы х компонент. Однако такие системы можно исследовать многими другими способами, и метод Хинчина, к сожалению, затерялся среди них. Между тем (как мы увидим ниже), алгоритм, намеченный А.Я.Хинчиным в общих чертах, применим к значительно более общей задаче о взаимодействии.

## n° 2. Числа заполнения

Буквальное понимание метода Хинчина не выводит за пределы независимых компонент и стандартной теории возмущений – слабое взаимодействие, малая плотность и тому подобное. Однако естественное обобщение основной идеи (в двух отношениях) значительно углубляет подход.

Это, во-первых векторный характер базисной функции H и, во-вторых, расширение класса функций F(X).

Формализуем этот новый подход.

## Пространство X

Фазовое пространство системы – это прямое произведение большого числа N,

$$N \gg 1, \qquad (9)$$

одинаковых компонент x,

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_N). \qquad (10)$$

Макро-пространство есть прямое произведение микро-пространств.

## Мера dX

Мера в фазовом пространстве "большой" системы X индуцирована мерой dx, заданной на компоненте x,

$$dX = dx_1 \, dx_2 \, \ldots \, dx_N . \qquad (11)$$

Макро-мера есть прямое произведение микро-мер.

## Базисная функция H(X)

Аддитивно построена по вектор-функции h(x), заданной на компоненте x,

$$H(X) = h(x_1) + h(x_2) + \ldots + h(x_N). \qquad (12)$$

Макро-функция H(X) есть сумма микро-функций h(x).

Понятия прямой суммы, прямого произведения являются наиболее полным формализованным выражением идеи н е з а в и с и м о с т и компонент.

## Функция F(X)

Произвольная скалярная функция f от вектор-функции H(X):

$$F(X) = f( H(X) ). \tag{13}$$

Главный инструмент учета в з а и м о д е й с т в и я – возможность рассмотрения п р о и з в о л ь н ы х, а не только аддитивных или мультипликативных функций f(H).

Отметим уже сейчас обстоятельство, важное для дальнейших построений.

Функция F(X) постоянна на каждой поверхности уровня функции H(X),

$$H(X) = E. \tag{14}$$

Это существенное расширение по сравнению с исходной схемой Хинчина. Там рассматривались только экспоненты,

$$F(X) = e^{-\tau H(X)}, \tag{15}$$

а функция H(X) была скалярной (и лишь в случае квантовых статистик рассматривалась решетка на плоскости).

Итак, нам нужно вычислить интеграл вида

$$I = \int_X f(H)\, dX. \tag{16}$$

Его можно переписать в форме интеграла Лебега-Стилтьеса,

$$I = \int_E f(E)\, dV(E), \tag{17}$$

где V(E) есть объем лебегова множества, то есть множества, ограниченного поверхностью уровня E,

$$H(X) \le E. \tag{18}$$

В случае вектор-функции H(X) интерпретация V(E) меняется, но формула для I сохраняется. Этот прием был независимо найден в физике для дискретных сумм. Величина, аналогичная dV(E), получила выразительное название – "числа заполнения".

Предположим далее, что V(E) дифференцируемая функция и, обозначив $\Omega(E)$ ее производную, запишем:

$$\int_X f(H)\, dX \;\mp\; \int_E f(E)\, \Omega(E)\, dE. \tag{19}$$

Замечание

.......................................................

Это соотношение задает линейный функционал $\Omega$,

$$I = \Omega\, [f],$$

на пространстве гладких функций f(E). При такой интерпретации допустимы обобщенные функции $\Omega$ (например, $\delta$-функция или даже производные от $\delta$-функции). Это позволяет на равных правах рассматривать интегралы и суммы и суммы интегралов. Иначе говоря, компонента x может быть как непрерывным, так и дискретным пространством, что необходимо в задачах, содержащих спиновые переменные.

.......................................................

Достоинства метода наиболее четко видны из этого соотношения. Они состоят в следующих особенностях. Размерность интеграла в левой части,

$$\dim X = N \dim x \tag{20}$$

огромна из-за количества компонент N, а размерность интеграла в правой части,

$$\dim E = \dim H = \dim h = K, \tag{21}$$

не зависит от N.

Это, конечно, самое главное. Но есть и второе обстоятельство. Для аппроксимации интересующих нас скалярных функций $F(X)$ мы располагаем двумя независимыми средствами — мы можем произвольно задавать векторную функцию $H(X)$ и (независимо) скалярную функцию $f(H)$. В интеграле справа один из множителей есть прямо $f(E)$ (и не зависит от $H$), а второй $\Omega(E)$ определяется только свойствами $H(X)$.

## n° 3. Преобразование Лапласа

Базисная функция $H(X)$,

$$H(X) = \begin{vmatrix} H^1(X) \\ H^2(X) \\ \ldots \\ H^K(X) \end{vmatrix} \qquad (22)$$

аддитивна по компонентам $x$. Поэтому экспонента от нее,

$$f(H,\tau) = e^{-\tau H(X)} = e^{-\tau_1 H^1(X) - \ldots - \tau_K H^K(X)} \qquad (23)$$

мультипликативна по компонентам $x$. Обозначим через $\Phi(\tau)$ соответствующий функционал:

$$\Phi(\tau) = \int_X e^{-\tau H(X)}\, dX. \qquad (24)$$

Применяя общую формулу к этому интегралу, находим, что

$$\Phi(\tau) \quad = \quad \int_E e^{-\tau E}\, \Omega(E)\, dE. \qquad (25)$$

Следовательно, $\Phi(\tau)$ есть преобразование Лапласа $\Omega(E)$ и мы можем, наоборот, выразить $\Omega$ через $\Phi$

$$\Omega(E) \quad = \quad \int_\Gamma e^{\tau E}\, \Phi(\tau)\, d\tau \qquad (26)$$

Подставляя найденное выражение $\Omega(E)$ в основную формулу, получим:

$$\int_X f(H)\, dX \quad = \quad \int_E \int_\Gamma f(E)\, e^{\tau E}\, \Phi(\tau)\, dE\, d\tau \qquad (27)$$

В правой части появился интеграл кратности 2К вместо К-кратного в формуле (19). Однако такая запись предпочтительнее, так как содержит $\Phi(\tau)$ и не содержит трудно вычислимую функцию $\Omega(E)$. Функцию же $\Phi(\tau)$ мы найдем, используя мультипликативность экспоненты от аддитивной функции:

$$\Phi(\tau) = \int_X e^{-\tau H(X)} dX = \int_{x_1} \ldots \int_{x_N} e^{-\tau h(x_1) - \ldots - \tau h(x_N)} dx \ldots dx \qquad (28)$$

Следовательно N – кратный интеграл распадается в произведение N однократных интегралов.

Здесь однократным мы считаем интеграл по фазовому пространству одной компоненты, которое, конечно, может быть многомерным. Главное – это избавиться от интегралов по всему X , справиться с "проклятием" размерности – числом N

Более того, все интегралы-сомножители оказываются одинаковыми и характеристическая функция $\Phi(\tau)$,

$$\Phi(\tau) = \prod_{i=1}^{i=N} \left( \int_x e^{-\tau h(x_i)} dx_i \right) = \left( \int_x e^{-\tau h(x)} dx \right)^N \qquad (29)$$

оказывается просто N-ой степенью аналогичной, но уже однокомпонентной функции.

Вводя характеристическую микро-функцию $\xi(\tau)$:

$$\Xi(\tau) \qquad = \qquad \int_x e^{-\tau\, h(x)}\, dx \qquad (30)$$

задаваемую интегралом по фазовому постранству только одной компоненты x, мы находим, что макро-функция $\Phi(\tau)$ есть просто степень микро-функции $\Xi(\tau)$:

$$\Phi(\tau) \qquad = \qquad [\, \Xi(\tau)\, ]^N \qquad (31)$$

и, следовательно,

$$\int_X f(H)\, dX \qquad = \qquad \int_E \int_\Gamma f(E)\, e^{\tau E}\, [\Xi(\tau)]^N\, dE\, d\tau \qquad (32)$$

Возвращаясь к старым обозначениям, можно (если это нужно) разделить задачи вычисления ядра $\Omega(E)$ и функционала $\Omega$, $I = \Omega\,[f]$

Функционал $\Omega$, $I = \Omega\,[f]$ выражается через ядро $\Omega\,(E,N)$ и заданную функцию $F(X) = f(\,H(X)\,)$:

$$\int_x f(H)\, dx \qquad = \qquad \int_E f(E)\, \Omega\,(E,N)\, dE \qquad (33)$$

Возможность вычисления ядра $\Omega\,(E,N)$,

$$\Omega\,(E,N) \qquad = \qquad \int_\Gamma e^{\tau E}\, [\Xi(\tau)]^N\, d\tau, \qquad (34)$$

определяется только знанием характеристической функции $\Xi(\tau)$,

$$\Xi(\tau) \qquad = \qquad \int_x e^{-\tau\, h(x)}\, dx\ , \qquad (35)$$

и не зависит ни от каких других свойств компоненты x.

Кроме того эти формулы показывают, что аморфная качественная характеристика – многокомпонентность системы X (которая вынуждала даже основные определения выписывать с многоточиями) превратились в количественную характеристику N – показатель степени в формуле для $\Omega$ .

---

Обозначения:

Для дальнейшего удобно ввести обозначение $\Delta(\tau,x)$ для плотности распределения (под'интегральной функции):

$$\Delta(\tau,x) \quad = \quad \exp\,[\,-\,\tau\, h(x)\,] \tag{36}$$

Это позволяет записать характеристическую функцию в компактной форме:

$$\Xi(\tau) \quad = \quad \int_X \Delta(\tau,x)\, dx, \tag{37}$$

---

Ниже мы увидим, что "проклятие" размерности превращается в этой задаче в "благословение". Асимптотика $N \gg 1$ оказывается значительно проще, чем прямые вычисления для $N = 10$ или даже $N = 3$.

В приведенных формулах расцеплены три аспекта нашей задачи – компонента, система и функция $F(x)$.

Свойства компоненты $x$ входят только в $\Xi(\tau)$. Если $\Xi(\tau)$ известна, то в дальнейшем свойства компоненты уже не имеют значения – они целиком (для нашей задачи) учтены при вычислении $\Xi(\tau)$. В частности, весьма различные компоненты $x$ могут порождать одну и ту же $\Xi(\tau)$. Это первый аспект.

Факт многокомпонентности локализован в свойствах функции $\Omega$ и, более точно, только в показателе $N$. Это второй аспект.

Наконец, третий аспект – характер функции $F(X)$ – имеет значение только на заключительной стадии вычислений. Напомним, что рассматривается вполне определенный класс функций – произвольные $f(E)$, заданные на векторе $H$. Иными словами, рассматриваются функции от функции, причем аргументом является функция $H$. Это, разумеется, радикальное сужение исходной задачи, когда подразумевались любые функции $F(X)$ (что, конечно, необозримо).

Но это существенное расширение подхода А.Я.Хинчина, когда допускались только сумматорные функции и экспоненты от них. Такое рассмотрение слишком узко и равносильно отказу от рассмотрения взаимодействия. Более точно, на такой основе можно учесть (методами теории возмущений) лишь слабое взаимодействие (или малую плотность и тому подобное).

В предлагаемом, более общем, подходе сохраняется, тем не менее, основной алгоритм аддитивных базисных функций ("сумматорных" по терминологии Хинчина). Меняется, однако, его назначение. Если раньше он был целью, то теперь он становится средством – средством решения более трудной задачи со взаимодействием.

## п°. 4. Парное взаимодействие.

Статистические суммы, изучаемые в физике, обычно имеют вид :

$$Z(\beta)=\int_{x_1}\int_{x_2}\ldots\int_{x_N} e^{-\beta\, G(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_N)}dx_1dx_2\ldots dx_N \tag{38}$$

где G(x) – гамильтониан системы,

$$G(x) = \sum_{i=1}^{N} a(x_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} b(x_i, x_k) \tag{39}$$

Гамильтониан содержит слагаемые двух типов. Первый тип – a(x) – описывает взаимодействие частицы с внешним миром. В ньютоновском приближении (при отсутствии третьих тел) оно сводится к кинетической энергии,

$$a(x) = \frac{m\, v^2}{2}. \tag{40}$$

Второй тип слагаемых – b(x,y) – описывает взаимодействие частиц друг с другом. Мы ограничиваемся парным взаимодействием. Иначе следовало бы рассматривать слагаемые, зависящие от большего числа аргументов, например, c(x,y,z). Подобное обобщение не вносит в алгоритм существенных изменений. В ньютоновском приближении взаимодействие описывается потенциалом U(x,y), зависящим только от координат и не содержащим импульсов.

В предлагаемой работе рассматривается специальный класс функций b(x,y), для которого можно провести все выкладки до конца. Дадим определение этого класса.

### Определение К-функции

Функция q(x) называется К-функцией ( по отношению к данному базису ), если она есть линейная комбинация конечного числа, ( а именно К штук ) функций базиса

$$q(x) = \sum_{\mu=1}^{K} C_{\mu}\, q^{\mu}(x) \qquad (41)$$

Аналогично определение К-функций от двух переменных

$$q(x,y) = \sum_{\mu=1}^{K} \sum_{\sigma=1}^{K} C_{\mu\sigma}\, q^{\mu}(x)\, q^{\sigma}(y). \qquad (42)$$

## Несколько замечаний по поводу определения.

Во-первых, определение существенно зависит от базиса. В другом базисе К-функция обычно содержит бесконечное число слагаемых (весь ряд Фурье по новому базису).

Во-вторых, для функций одной переменной любое конечное семейство функций можно дополнить до базиса так, что это семейство станет семейством К-функций.

В-третьих, К-функции - это естественное обобщение понятия квазимногочленов.

В-четвертых, это понятие аналогично (более точно, двойственно) понятию финитной функции.

Финитная функция обращается в нуль на далеких координатах в данном пространстве; К-функция обращается в нуль на далеких коэффициентах Фурье в данном базисе ( а именно,начиная с К+1 коэффициента ).

Итак, введем некоторый базис {q},

$$q^{\mu} = q^{\mu}(x)\,, \qquad (43)$$

в пространстве функций одной переменной q(x),

$$q(x) = C_{\mu}\, q^{\mu}(x). \qquad (44)$$

Предположим далее, что взаимодействие b(x,y) есть К-функция в этом базисе

$$b(x,y) = B_{\mu\sigma}\, q^{\mu}(x)\, q^{\sigma}(y) \qquad (45)$$

В этих записях использовано правило суммирования по верхним и нижним индексам.

Для дальнейшего удобно отличать "внутреннее" (микро) суммирование от "внешнего" (макро)

"Внутреннее" суммирование - это суммирование по состояниям с использованием греческих индексов и без знака суммы.

"Внешнее" суммирование - это суммирование по частицам с использованием латинских индексов и со знаком суммы.

Возвращаясь к вычислению статистической суммы, подставим выражение для b(x,y) в формулу для гамильтониана

$$G = \sum_{i=1}^{N} a(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} B_{\mu\sigma}\, q^{\mu}(x_i)\, q^{\sigma}(x_k). \qquad (46)$$

Изменим порядок суммирования в четырехкратной сумме

$$G = [\sum_{i=1}^{N} a(x_i)] + \frac{1}{2} B_{\mu\sigma} [\sum_{i=1}^{N} q^{\mu}(x_i)] [\sum_{k=1}^{N} q^{\sigma}(x_k)] \qquad (47)$$

Это выражение подсказывает идею ввести новые переменные

$$A(x) = \sum_{i=1}^{N} a(x_i), \qquad (48)$$

$$Q^{\mu}(x) = \sum_{i=1}^{N} q^{\mu}(x_i), \qquad (49)$$

и рассматривать G как многочлен от этих переменных

$$G = A + \frac{1}{2} B_{\mu\sigma}\, Q^{\mu} Q^{\sigma} \qquad (50)$$

Элементарные, казалось бы, выкладки демонстрируют глубокий факт.

Парное взаимодействие G задается многочленом (скалярным) второй степени от сумматорной (векторной) функции H,

$$H(x) = \begin{vmatrix} A(x) \\ Q^{\mu}(x) \end{vmatrix}. \qquad (51)$$

Проведенные выкладки позволяют записать многомерный интеграл, определяющий статистическую сумму,

$$Z(\beta) = \int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_N} e^{-\beta G(x_1, x_2, \dots, x_N)}\, dx_1 dx_2 \dots dx_N, \qquad (52)$$

в более компактной форме:

$$Z(\beta) = \int_E \int_\Gamma e^{-\beta G(E) + \tau E + N \ln \Xi(\tau)} dE\, d\tau \qquad (53)$$

Произошло уменьшение размерности интеграла. Оно превратило "невычислимую" задачу $Z=I[\beta;X]$ в трудную, но реальную задачу $Z=I[\beta;E,\tau]$. Это стало возможным из-за специального выбора векторной функции $H(X)$, (построенной по гамильтониану G) и представления гамильтониана G в виде квадратичной функции от H. Такое построение возможно далеко не для всякого гамильтониана. Достаточным условием является принадлежность функции $b(x,y)$ классу K-функций в некотором базисе.

Взаимодействие по три – $c(x,y,z)$ – "тройное" взаимодействие можно учесть точно так же. Различие в том, что гамильтониан G будет уже кубичной, а не квадратичной функцией сумматорной функции $H(X)$.

## Заключение.

Метод Хинчина позволяет существенно уменьшить размерность многомерных интегралов для специального класса под'интегральных функций.

Общий вид таких функций – это функция от функции:

$$F(X) = f(E), \qquad E = H(X), \qquad (f)$$

где $f=f(E)$ – произвольная скалярная функция векторного аргумента E, а $E = H(X)$ – сумматорная вектор-функция

$$H(X) = h(x_1) + \ldots + h(x_N). \qquad (H)$$

Показано, что для этого специального класса имеет место тождество:

$$\int_x \ldots \int_x F(x_1,\ldots,x_N)\, dx_1 \ldots dx_N \equiv \int_E \int_\Gamma f(E)\, e^{\tau E} [\Xi(\tau)]^N dE\, d\tau, \qquad (E\Gamma)$$

сводящее интеграл кратности $L = N \dim(x)$, к интегралу кратности 2K и, что очень важно, число N входит уже только в показатель под'интегральной функции. Это подсказывает идею применить к вычислению интеграла метод перевала.

Приложение к статистической физике ограничено возможностью записи статистической суммы в нужном виде. Покзано, что это возможно для модельных ситуаций.

Более точно. Пусть статистическая сумма имеет вид:

$$Z(\beta) = \int_{x_1} \int_{x_2} \ldots \int_{x_N} e^{-\beta G(x_1, x_2, \ldots, x_N)} dx_1 dx_2 \ldots dx_N, \qquad (G)$$

Пусть, далее, гамильтониан системы $G(X)$ задан формулой:

$$G(x) = \sum_{i=1}^{N} a(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} b(x_i, x_k), \qquad (b)$$

где функция $b(x,y)$, описывающая взаимодействие, принадлежит узкому классу модельных К-функций:

$$b(x,y) = B_{\mu\sigma}\, q^{\mu}(x)\, q^{\sigma}(y), \qquad (K)$$

Тогда общий метод Хинчина применим и к этой (модельной) задаче и приводит к тождеству:

$$Z(\beta) = \int_E \int_\Gamma e^{-\beta G(E) + \tau E + N \ln \Phi(\tau)} dE\, d\tau \qquad (Z)$$

где функция $G(E)$ – это просто многочлен второго порядка от своих аргументов

$$G = A + \frac{1}{2} B_{\mu\sigma} Q^{\mu} Q^{\sigma} \qquad (GH)$$

Очевидная идея применить метод перевала к вычислению такой статсуммы реализована во второй части препринта.

Уравнения, определяющие седловую точку, оказываются системой нелинейных интегральных уравнений. Эту систему можно записать в форме уравнения Власова-Хинчина.

ЛИТЕРАТУРА


1 Хинчин А.Я. Математические основания статистической механики Москва,Гостехиздат,1943

2 Молчанов А.М. Билинейные системы. Препринт НЦБИ АН СССР, Пущино 1982

3 Молчанов А.М. Макродинамика. Препринт НЦБИ АН СССР, Пущино 1984


## Post scriptum

Прямые вычисления статистических сумм не под силу не только современной, но и будущей вычислительной технике.

Действительно, самая грубая оценка снизу логарифма числа операций, необходимых для вычисления I, это N lрg2 = .301N операций, где N - число частиц (размерность X). И это если взять всего две точки по каждой оси. А если взять десять (что тоже мало !), то получится N ...

Согласимся ждать результата целый год ( ≈ 32 миллиона секунд).Если K производительность ЭВМ - число операций в секунду,то за это время ЭВМ произведет L операций ( L ≈ K·32 миллиона )

Число частиц N в системе (которую мы сможем "обсчитать" за этот томительный год) оценивается неравенством

$$N \le \frac{\log (3.10^7 K)}{\log 2} < 3.4 ( 7 + \log K ) \qquad (K)$$

Даже если оптимистично считать, что производительность ЭВМ K = " миллиард миллиардов операций в секунду ", то мы получаем грустную оценку для N ,

$$N < 65$$

в то время как интересные N "начинаются" с сотен и тысяч ...

Т10066. 20.04.87 г. Тир. 350 экз. Зак. 318Р.
Уч.-изд.л. 1,0. Изд. № 138. Бесплатно.

Отпечатано с оригинала-макета на ротапринте в
Отделе научно-технической информации Научного центра
биологических исследований АН СССР в Пущине